E.N.S.I. CHIMIE CENTRE 1982

P MATHÉMATIQUES II (2 h)

NOTATIONS GÉNÉRALES :

On désigne par :

I l'intervalle réel $[0, +\infty[$

E l'ensemble des fonctions de la variable réelle t définies et continues pour tout t de I;

R l'ensemble des nombres réels;

R_+ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls;

R_+^* l'ensemble des nombres réels strictement positifs;

N^* l'ensemble des entiers strictement positifs;

N_q^* l'ensemble des entiers p tels que $1 \leqslant p \leqslant q$.

1ère partie

On dit qu'une fonction f de E est d'ordre exponentiel si l'on peut trouver trois nombres réels $\alpha(\alpha \in R)$, t_0 $(t_0 \in R_+)$ et M $(M \in R_+^*)$ tels que :

$$t > t_0 \Rightarrow |f(t)| \leqslant Me^{\alpha t},$$

et l'on écrit : $f(t) = O(e^{\alpha t})$ (et en particulier $f(t) = O(1)$ si $\alpha = 0$).

1° Montrer que si deux fonctions f et g de E sont d'ordre exponentiel :

$$f(t) = O(e^{\alpha t}) \quad (\alpha \in R)$$
$$g(t) = O(e^{\beta t}) \quad (\beta \in R)$$

alors les fonctions fg et $\lambda f + \mu g$ $[(\lambda, \mu) \in R^2]$ sont aussi d'ordre exponentiel :

$$f(t)\, g(t) = O(e^{\alpha_1 t}) \qquad (\alpha_1 \in R)$$
$$\lambda f(t) + \mu\, g(t) = O(e^{\alpha_2 t}) \qquad (\alpha_2 \in R)$$

2° Montrer que si $f(t) = O(e^{\alpha t})$ alors $f(t) = O(e^{\alpha' t})$ pour tout réel α' strictement supérieur à α.

Démontrer qu'il existe un nombre réel $M'_\alpha (M'_\alpha \in R_+^*)$ tel que :

$$\forall\, t \in I \;|f(t)| \leqslant M'_\alpha\, e^{\alpha t}.$$

2ème partie

On désigne par E' le sous-ensemble des fonctions de E d'ordre exponentiel.

A toute fonction f de E' on associe, lorsqu'elle existe, la fonction F de la variable réelle s définie par l'intégrale :

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

La fonction f est dite sommable pour s si l'intégrale définissant F est absolument convergente et F est appelée image de f.

1° Si l'on pose $f(t) = O(e^{\alpha t})$ montrer que f est sommable pour tout s strictement supérieur à α.

En déduire que $F(s)$ tend vers une limite que l'on déterminera lorsque $s \to +\infty$.

2° Montrer que la fonction g de E :

$$t \longmapsto g(t) = t^n e^{at} \; (n \in N^*, a \in R)$$

est sommable pour tout s strictement supérieur à a.

3ème partie

Soit f une fonction de E', $[f(t) = O(e^{\alpha t})]$, n fois dérivable sur I $(n \in N^*)$.

On suppose que les n dérivées successives notées $f^{(1)}$ ou f', $f^{(2)}$ ou f'', $f^{(3)}$, ..., $f^{(n)}$ appartiennent aussi à E' avec $f^{(p)}(t) = O(e^{\alpha t})$ pour tout $p \in N_n^*$.

.../...

On désigne respectivement par F et $F_{(n)}$ les images des fonctions f et $f^{(n)}$.

Montrer que : $$F_{(n)}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \sum_{p=2}^{n} s^{n-p} f^{(p-1)}(0) \quad s > \alpha$$

En déduire que $sF(s)$ tend vers une limite que l'on déterminera lorsque $s \to +\infty$.

4ème partie

Soit f une fonction de E' : $f(t) = O(e^{\alpha t})$, et soit F l'image de f.

On pourra utiliser sans démonstration le fait que :

a. Sur l'intervalle $]\alpha, +\infty[$ F est une fonction continue de s, de telle sorte que :

$$\forall a > \alpha, \qquad \lim_{s \to a} F(s) = \lim_{s \to a} \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

b. F est indéfiniment dérivable de telle sorte que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{d^p F(s)}{ds^p} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^p (e^{-st})}{\partial s^p} f(t)\, dt$$

On définit la fonction f_n de E ($n \in \mathbb{N}^*$) par la relation :

$$t \longmapsto f_n(t) = \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$$

Établir que $f_n(t)$ est de la forme $e^{-t} P_n(t)$ où P_n désigne un polynôme de degré n.

On pose : $$f_n(t) = e^{-t} \sum_{p=0}^{n} a_{n,p}\, t^p.$$

Montrer que : $$a_{n,p} = (-1)^p \frac{n!}{p!} C_n^p$$

2° Montrer que f_n est sommable pour tout s strictement supérieur à -1. On désigne son image par F_n.

Après avoir démontré la relation :

$$F_n(s) = s^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-(s+1)t}\, dt \qquad (s > -1)$$

on demande d'établir la relation de récurrence :

$$F_n(s) = n \frac{s}{s+1} F_{n-1}(s) \qquad (n < 1, s > -1)$$

et de déterminer l'expression de $F_n(s)$ en fonction de s et n.

3° *a.* La valeur de n étant fixée on définit les intégrales :

$$L_{n,0} = \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt$$

$$L_{n,k} = \int_0^{+\infty} t^k f_n(t)\, dt \qquad (k \in \mathbb{N}_n^*)$$

Exprimer $L_{n,0}$ et $L_{n,k}$ en fonction de n et k.

b. Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$.

Démontrer que :

$$\int_0^{+\infty} e^t f_m(t) f_n(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ (n!)^2 & \text{si } m = n \end{cases}$$

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail